Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 12)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

14. Januar 2005

1 Nullstellen, Polstellen, Lücken

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

Nullstellen des Polynoms im Zähler:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \qquad x_{g0} = 1$$

Hornerschema:

	1	3	0	-4
		1	4	4
$x_{g0} = 1$	1	4	4	0
		-2	-4	
$x_{g1} = -2$	1	2	0	

$g_1(x) = x^2 + 4x + 4 \qquad x_{g1} = -2$

$g_2(x) = x + 2 \qquad x_{g2} = -2$

Nullstellen des Polynoms im Nenner:

$$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \qquad x_{h0} = 1$$

Hornerschema:

	1	1	-1	-1
		1	2	1
$x_{h0} = 1$	1	2	1	0
		-1	-1	
$x_{h1} = -1$	1	1	0	

$h_1(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad x_{h1} = -1$

$h_2(x) = x + 1 \qquad x_{h2} = -1$

Faktorisierung:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

- Lücken: $x = 1$
- Polstellen: $x = -1$
- Nullstellen: $x = -2$

2 Partialbruchzerlegung

2.1 Komplex

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^4 - 1}$$

Nullstellen des Polynoms im Nenner:

$$g(x) = x^4 - 1 \qquad x_{g0} = 1$$

Hornerschema:

	1	0	0	0	−1
		1	1	1	1
$x_{g0} = 1$	1	1	1	1	0
		−1	0	−1	
$x_{g1} = -1$	1	0	1	0	

$g_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad x_{g1} = -1$

$g_2(x) = x^2 + 1 \qquad x_{g2} = \mathrm{i}$

$x_{g3} = -\mathrm{i}$

Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^4 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-\mathrm{i}} + \frac{D}{x+\mathrm{i}}$$

Da Nullstellen konjugiert komplex sind, gilt

$$D = \overline{C}$$

Multiplikation mit Hauptnenner und Kürzen:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x = {} & A(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) + B(x-1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) + \\ & + C(x-1)(x+1)(x+\mathrm{i}) + \overline{C}(x-1)(x+1)(x-\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Einsetzen der Nullstellen:

- $x = 1$

$$\begin{aligned} 1^3 + 1^2 - 1 &= A(1+1)(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) \\ 1 &= 2A(1+\mathrm{i}-\mathrm{i}+1) \\ 1 &= 4A \\ A &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $x = -1$

$$\begin{aligned} (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) &= B((-1)-1)((-1)-\mathrm{i})((-1)+\mathrm{i}) \\ (-1)+1+1 &= B(-2)(1-\mathrm{i}+\mathrm{i}+1) \\ 1 &= -4B \\ B &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $x = \mathrm{i}$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^2 - \mathrm{i} &= C(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}+\mathrm{i}) \\ -\mathrm{i}-1-\mathrm{i} &= C2\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}-\mathrm{i}-1) \\ -1-2\mathrm{i} &= C(-4\mathrm{i}) \\ C &= \frac{-1-2\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}} \\ &= \frac{(-1-2\mathrm{i})(4\mathrm{i})}{(-4\mathrm{i})(4\mathrm{i})} \\ &= \frac{-4\mathrm{i}+8}{16} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i} \end{aligned}$$

- $x = -\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \overline{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^4 - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}$$

2.2 Reell

Zusammenfassen der komplexen Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{i}\right)(x+\mathrm{i}) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{i}\right)(x-\mathrm{i})}{(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{4}\mathrm{i}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{1}{4}\mathrm{i}x+\frac{1}{4}}{x^2+\mathrm{i}x-\mathrm{i}x+1} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+1}
\end{aligned}$$

3 Beweis 1

3.1

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a\left(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}\right) \\
&= \log_a\left(e^{\log_a x \cdot \ln a} \cdot e^{\log_a y \cdot \ln a}\right) \\
&= \log_a\left(e^{\log_a x \cdot \ln a + \log_a y \cdot \ln a}\right) \\
&= \log_a\left(e^{(\log_a x + \log_a y)\ln a}\right) \\
&= \log_a\left(a^{\log_a x + \log_a y}\right) \\
&= \log_a x + \log_a y
\end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned}
\log_a(\frac{x}{y}) &= \log_a\left(\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}\right) \\
&= \log_a\left(\frac{e^{\log_a x \cdot \ln a}}{e^{\log_a y \cdot \ln a}}\right) \\
&= \log_a\left(e^{\log_a x \cdot \ln a - \log_a y \cdot \ln a}\right) \\
&= \log_a\left(e^{(\log_a x - \log_a y)\cdot \ln a}\right) \\
&= \log_a\left(a^{\log_a x - \log_a y}\right) \\
&= \log_a x - \log_a y
\end{aligned}$$

3.3

$$\begin{aligned}
(a^x)^y &= \left(e^{x\cdot\ln a}\right)^y \\
&= e^{y\cdot\ln\left(e^{x\cdot\ln a}\right)} \\
&= e^{y\cdot x\cdot\ln a} \\
&= a^{xy}
\end{aligned}$$

4 Beweis 2

$$\begin{aligned}
a &= c^{\log_c a} \\
&= e^{\log_c a\cdot\ln c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= c^{\log_c b} \\
&= e^{\log_c b\cdot\ln c} \\
\curvearrowright \ln b &= \log_c b\cdot\ln c \\
\curvearrowright \ln c &= \frac{\ln b}{\log_c b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_b a &= \log_b\left(e^{\log_c a\cdot\ln c}\right) \\
&= \log_b\left(e^{\log_c a\cdot\frac{\ln b}{\log_c b}}\right) \\
&= \log_b\left(e^{\frac{\log_c a}{\log_c b}\cdot\ln b}\right) \\
&= \log_b\left(b^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}\right) \\
&= \frac{\log_c a}{\log_c b}
\end{aligned}$$

Für die Gleichung $\log_x a = b$ muss $x \neq 1$ sein, damit die Gleichung $x^b = a$ lösbar ist.

5 Trigonometrische Funktionen

5.1

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2} \\
x &= \arcsin \frac{1}{2} \\
x_1 &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\
x_2 &= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \\
&= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi
\end{aligned}$$

5.2

$$\begin{aligned}
\tan x &= -1 \\
x &= \arctan -1 \\
&= -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

6 Beweis 3

$$\begin{aligned}
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left(\frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z}\right) - \left(\frac{1}{4}\left(e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}e^{2z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2z} - \left(\frac{1}{4}e^{2z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2z}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$