Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 9)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

16. Dezember 2004

1 Geometrische Reihen

1.1

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n+2} - 4 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^2 \frac{1}{2^{2n}} - 4 \\
&= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 4 \\
&= 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 4 \\
&= 4 \cdot \frac{4}{3} - 4 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^4}{2^n} \\
&= 16 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 16 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 32
\end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right| &= \frac{|1-\mathrm{i}|}{2}\\ &= \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^n - 1\\ &= \frac{1}{1-\frac{1-\mathrm{i}}{2}} - 1\\ &= \frac{2}{2-1+\mathrm{i}} - 1\\ &= \frac{2}{1+\mathrm{i}} - 1\\ &= \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} - 1\\ &= \frac{2-2\mathrm{i}}{2} - 1\\ &= 1-\mathrm{i}-1\\ &= -\mathrm{i}\end{aligned}$$

2 Konvergenz und Divergenz von Reihen

2.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2004\,k+1}$$

Untersuchen Grenzwert der Folge

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k}{2004\,k+1} \\ &= \frac{k}{k(2004+\frac{1}{k})} \\ &= \frac{1}{2004+\frac{1}{k}} \\ \lim_{k\to\infty} a_k &= \frac{1}{2004} \neq 0 \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Folge a_k ist keine Nullfolge, d.h. notwendige Bedingung ist nicht erfüllt, d.h. Ausgangsreihe ist divergent.

2.2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^k)}{3^k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 \\ &= \frac{3}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Aus der Existenz einer konvergenten Majorante folgt, dass die Ausgangsreihe ebenfalls konvergent ist.

2.3

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k^2+4)}} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+4k}} \\ &< \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die gefundene Majorante der Form $\sum \frac{1}{k^p}$ mit $p = \frac{3}{2} > 1$ ist konvergent. Damit ist auch die Ausgangsreihe konvergent.

2.4

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2-2}} &> \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die gefundene Minorante der Form $\sum \frac{1}{k^p}$ mit $p = 1$ ist divergent. Damit ist auch die Ausgangsreihe divergent.

2.5

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2004}}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2004}}{2^{k-1}}$$

Anwenden Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{\left| \frac{k^{2004}}{2^{k-1}} \right|} \right) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{2004}}{2^{\frac{k-1}{k}}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{2004}}{2^{\frac{k(1-\frac{1}{k})}{k}}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{2004}}{2^{1-\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{2} < 1\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die gefundene Majorante ist konvergent. Damit ist auch die Ausgangsreihe konvergent.

2.6

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2004}{2005}\right)^k \cdot k^4$$

Anwenden Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{2004}{2005}\right)^k \cdot k^4\right|} &= \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{\left(\frac{2004}{2005}\right)^k} \cdot \sqrt[k]{k^4}\right) \\
&= \frac{2004}{2005} \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{k}\right)^4 \\
&= \frac{2004}{2005} < 1
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Ausgangsreihe ist konvergent.

2.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{2004} - 1\right)^k < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{2004} - \frac{1}{2}\right)^k$$

Anwenden Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(\sqrt[k]{2004} - \frac{1}{2}\right)^k\right|} &= \lim_{k\to\infty} \left|\sqrt[k]{2004} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die gefundene Majorante ist konvergent. Damit ist auch die Ausgangsreihe konvergent.

2.8

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}$$

Die Glieder der Reihe bilden alternierende Folge.
$\curvearrowright$ Anwenden Leibniz-Kriterium:

1. Nullfolge

$$\lim_{k\to\infty}\left((-1)^k \cdot \frac{1}{2\,k+1}\right) = 0$$

2. Monotonie

$$\begin{aligned}
|a_k| &\geq |a_{k+1}| \\
\left|\frac{(-1)^k}{2\,k+1}\right| &\geq \left|\frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)+1}\right| \\
\frac{1}{2\,k+1} &\geq \frac{1}{2\,k+3} \\
2\,k+3 &\geq 2\,k+1 \\
3 &\geq 1
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Glieder der Reihe bilden monotone Nullfolge. Damit ist die Ausgangsreihe konvergent.

3 Konvergierende Reihen

3.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2\,k}$$

Anwenden Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{2(k+1)}}{\frac{x^k}{2\,k}} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1} 2\,k}{2(k+1)x^k} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2kx}{2(k+1)} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{kx}{k+1} \right| \\
&= |x| \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \\
&= |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \\
&= |x| < 1
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Reihe ist konvergent für $-1 < x < 1$
Untersuchen der Randpunkte:

- $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

  ist harmonische Reihe und damit divergent.

- $x = -1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$$

  ist alternierende Reihe.

  $\curvearrowright$ Untersuchen auf monotone Nullfolge:

  1. Nullfolge

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{2k} &= \lim_{k\to\infty} \left((-1)^k \cdot \frac{1}{2k} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Monotonie

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(-1)^k}{2k}\right| &\geq \left|\frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)}\right| \\
\frac{\left|(-1)^k\right|}{2k} &\geq \frac{\left|(-1)^{k+1}\right|}{2k+2} \\
\frac{1}{2k} &\geq \frac{1}{2k+2} \\
2k+2 &\geq 2k \\
2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ Die Glieder der Reihe bilden monotone Nullfolge. Damit ist die Ausgangsreihe konvergent.

$\curvearrowright$ Die Ausgangsreihe ist konvergent für $-1 \leq x < 1$

3.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}$$

Setzen $y = x^2$, anwenden Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
1 &> \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{1+y^{k+1}}}{\frac{1}{1+y^k}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1+y^k}{1+y^{k+1}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|1+y^k\right|}{\left|1+y^{k+1}\right|}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \left|1+y^k\right| < \lim_{k\to\infty} \left|1+y^{k+1}\right|$$

ist erfüllt für $y > 1$ bzw. $x^2 > 1 \curvearrowright |x| > 1 \curvearrowright x < -1 \vee x > 1$

Untersuchen der Randpunkte:

- $x = -1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^{2k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+1^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ist divergent.

- $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+1^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

  ist divergent.

$\curvearrowright$ Die Ausgangsreihe ist konvergent für $x \in \{x: \ x < -1 \vee x > 1\}$.

4 Fehler in Rechnung

Durch das Zusammenfassen der Brüche und das damit verbundene Umsortieren ändern sich die Partialsummen der Reihe. Dieser Schritt ist daher nicht zulässig, ohne die Gleichheit zu verlieren, da die Reihe nicht absolut konvergent ist.