Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

9. Serie — Abgabe in der Übung am 17.12.2004

Die Übungsaufgaben findet man auch im Internet unter der Adresse
`http://www.mathe.tu-freiberg.de/~lyska/BNC-2004`

1. Man berechne mit Hilfe der geometrischen Reihe:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n+2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

2. Man untersuche, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2004\,k+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^k)}{3^k}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k^2+4)}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2-2}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2004}}{k!}$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2004}{2005}\right)^k k^4$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{2004}-1)^k$

   (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

3. Für welche reellen Zahlen x konvergieren die Reihen

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}$?

4. Wo steckt der Fehler in folgender Rechnung. Es gilt (tatsächlich)

   $$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \pm \ldots$$

   Durch Verdopplung erhält man

   $$\begin{aligned} 2\,\ln 2 &= 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \pm \ldots \\ &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \pm \ldots \end{aligned}$$

   Fasst man die Terme mit gleichem Nenner zusammen, ergibt sich

   $$2\,\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \pm \ldots = \ln 2.$$