Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 6)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

19. November 2004

1 Kartesische Darstellung

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} &= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} &= \left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} + e^{\mathrm{i}(\omega t+\frac{2\pi}{3}+\varphi)} + e^{\mathrm{i}(\omega t+\frac{4\pi}{3}+\varphi)} &= 0 \\
e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\, e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\, e^{\mathrm{i}\varphi} &= 0 \\
e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\varphi} \left(1 + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\right) &= 0 \\
e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\varphi} \left(1 + \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right) &= 0 \\
e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\varphi} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right) &= 0 \\
e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\varphi} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) &= 0 \\
e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}\varphi} \cdot 0 &= 0
\end{aligned}
$$

2 Polynomdivision

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^6 + z^4 + z^2 + 1 \\
g(z) &= z^2 + z + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \cdot g &= (z^6 + z^4 + z^2 + 1)(z^2 + z + 1) \\
&= z^8 + z^7 + z^6 + z^6 + z^5 + z^4 + z^4 + z^3 + z^2 + z^2 + z + 1 \\
&= z^8 + z^7 + 2z^6 + z^5 + 2z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f : g &= (z^6 + z^4 + z^2 + 1) : (z^2 + z + 1) \\
&= z^4 - z^3 + z^2 + \frac{1}{z^2 + z + 1}
\end{aligned}
$$

3 Teilerpolynom

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^6 + 6 \\
g(z) &= z^3 + 3
\end{aligned}
$$

Gesucht sind $q(z)$ und $r(z)$, so dass gilt

$$
\begin{aligned}
f &= q \cdot g + r \\
\Rightarrow \frac{f}{g} &= q + \frac{r}{g} \\
\Rightarrow (z^6 + 6) : (z^3 + 3) &= z^3 - 3 + \frac{15}{z^3 + 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow q(z) &= z^3 - 3 \\
r(z) &= 15
\end{aligned}
$$

4 Polynom, Teiler und kanonische Faktorisierung

Gegeben sei das Polynom

$$f(z) = z^3 + z^2 - 4z - 4$$

1. Funktionswert $f(-2)$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) - 4 \\ &= -8 + 4 + 8 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\curvearrowright z_0 = -2$$

2. Teiler von f

   Hornerschema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & & -2 & 2 & 4 \\ \hline f(-2) & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\curvearrowright g(z) = z^2 - z - 2$$

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ z_1 &= 2 \\ z_2 &= -1 \end{aligned}$$

3. kanonische Faktorisierung

$$f(z) = (z + 2)(z - 2)(z + 1)$$

5 Kanonische Faktorisierung

Das in der Aufgabenstellung gegebene Polynom

$$f(z) = 2x^8 + 4x^7 + 10x^4 + 12x^3 + 4x^2$$

besitzt keine Nullstellen, da es konstant ist. ;-)

Für den Fall, dass es sich um einen Tippfehler handelt und das Polynom

$$f(z) = 2z^8 + 4z^7 + 10z^4 + 12z^3 + 4z^2$$

gemeint ist, lautet die Lösung:

$$\begin{aligned}
f(z) &= 2z^8 + 4z^7 + 10z^4 + 12z^3 + 4z^2 \\
&= 2z^2(z^6 + 2z^5 + 5z^2 + 6z + 2) \\
\curvearrowright z_0 &= z_1 = 0 \\
\curvearrowright f_2(z) &= z^6 + 2z^5 + 5z^2 + 6z + 2
\end{aligned}$$

Hornerschema:

	1	2	0	0	5	6	2	
		-1	-1	1	-1	-4	-2	
$f_2(-1)$	1	1	-1	1	4	2	0	$\curvearrowright z_2 = -1$
		-1	0	1	-2	-2		
$f_3(-1)$	1	0	-1	2	2	0		$\curvearrowright z_3 = -1$
		-1	1	0	-2			
$f_4(-1)$	1	-1	0	2	0			$\curvearrowright z_4 = -1$
		-1	2	-2				
$f_5(-1)$	1	-2	2	0				$\curvearrowright z_5 = -1$

Es ergeben sich die Teilerpolynome

$$\begin{aligned}
f_3(z) &= z^5 + z^4 - z^3 + z^2 + 4z + 2 \\
f_4(z) &= z^4 - z^2 + 2z + 2 \\
f_5(z) &= z^3 - z^2 + 2 \\
f_6(z) &= z^2 - 2z + 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{6/7} &= 1 \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 2} \\
&= 1 \pm \sqrt{1-2} \\
&= 1 \pm \sqrt{-1} \\
z_6 &= 1 + \mathrm{i} \\
z_7 &= 1 - \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\curvearrowright f(z) = 2z^2(z+1)^4(z-(1+\mathrm{i}))(z-(1-\mathrm{i}))
$$

6 Zusatzaufgabe

Summe der Impedanzen eines RCL-Gliedes:

$$
R_{ges} = R + \frac{1}{\mathrm{i}C\omega} + \mathrm{i}L\omega
$$

Gesucht ist ω, für das gilt

$$
\operatorname{Im} R_{ges} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_{ges} &= R + \frac{1}{\mathrm{i}C\omega} + \mathrm{i}L\omega \\
&= \frac{R(\mathrm{i}C\omega) + 1 + (\mathrm{i}L\omega)(\mathrm{i}C\omega)}{\mathrm{i}C\omega} \\
&= \frac{\mathrm{i}RC\omega + 1 - LC\omega^2}{\mathrm{i}C\omega} \cdot \frac{-\mathrm{i}C\omega}{-\mathrm{i}C\omega} \\
&= \frac{RC^2\omega^2 - \mathrm{i}C\omega + \mathrm{i}LC^2\omega^3}{C^2\omega^2} \\
&= \frac{RC\omega + \mathrm{i}(LC\omega^2 - 1)}{C\omega}
\end{aligned}
$$

Gesucht:

$$
\begin{aligned}
LC\omega^2 - 1 &= 0 \\
\omega^2 &= \frac{1}{LC} \\
\omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}
$$

Gesamtimpedanz:

$$
\begin{aligned}
R_{ges} &= R + \frac{1}{\mathrm{i}C\omega} + \mathrm{i}L\omega \\
&= R + \frac{1}{\mathrm{i}C\frac{1}{\sqrt{LC}}} + \mathrm{i}L\frac{1}{\sqrt{LC}} \\
&= R + \frac{\sqrt{L}\sqrt{C}}{\mathrm{i}C} + \frac{\mathrm{i}L}{\sqrt{L}\sqrt{C}} \\
&= R + \frac{\sqrt{L}}{\mathrm{i}\sqrt{C}} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \\
&= R + \frac{\sqrt{L}}{\mathrm{i}\sqrt{C}} + \frac{\mathrm{i}^2\sqrt{L}}{\mathrm{i}\sqrt{C}} \\
&= R + \frac{\sqrt{L} - \sqrt{L}}{\mathrm{i}\sqrt{C}} \\
&= R
\end{aligned}
$$