Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 1 (Serie 5)
Studiengang Network Computing
WS 2004/2005

Martin Grandrath (Matr. Nr.: 46375)

13. November 2004

1 Drehung in der komplexen Ebene

1. Verschiebung des Drehpunktes in den Koordinatenursprung

$$
\begin{aligned}
z \to z_1 :\ z_1 &= z - a \\
&= (1 + 2\mathrm{i}) - (2 - 2\mathrm{i}) \\
&= -1 + 4\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

2. Ausführen der Drehung

$$
\begin{aligned}
z_1 \to z_2 :\ z_2 &= c \cdot z_1 \\
&= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) z_1 \\
&= \left(\cos -\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{3}\right)(-1 + 4\mathrm{i}) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(-1 + 4\mathrm{i}) \\
&= -\frac{1}{2} + 2\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + 2\sqrt{3} \\
&= \left(-\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\right) + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

3. Rückverschiebung

$$\begin{aligned} z_2 \to w: \; w &= z_2 + a \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\right) + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} + (2 - 2\mathrm{i}) \\ &= \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + 2\right) + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)\mathrm{i} \\ &= \left(2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\ &= \left(\frac{4\sqrt{3} + 3}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

2 Komplexe arithmetische Operationen

2.1 Spiegelung an der Geraden $\operatorname{Im} z = 1$

1. Bestimmung der Spiegelachse

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z &= 1 \\ \operatorname{Im}(x + y\mathrm{i}) &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

2. Verschiebung der Spiegelachse auf die reelle Achse

$$\begin{aligned} z \to z_1: \; z_1 &= z - a \qquad \text{mit } a = \mathrm{i} \\ &= x + y\mathrm{i} - \mathrm{i} \\ &= x + (y-1)\mathrm{i} \end{aligned}$$

3. Ausführen der Spiegelung

$$\begin{aligned} z_1 \to z_2: \; z_2 &= \overline{z_1} \\ &= \overline{x + (y-1)\mathrm{i}} \\ &= x - (y-1)\mathrm{i} \end{aligned}$$

4. Rückverschiebung

$$\begin{aligned} z_2 \to w: \; w &= z_2 + a \\ &= (x - (y-1)\mathrm{i}) + \mathrm{i} \\ &= x - y\mathrm{i} + \mathrm{i} + \mathrm{i} \\ &= x + (2-y)\mathrm{i} \end{aligned}$$

2.2 Spiegelung an der Geraden $\mathrm{Re}((1-\mathrm{i})z) = 0$

1. Bestimmung der Spiegelachse

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}((1-\mathrm{i})z) &= 0 \\
\mathrm{Re}((1-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})) &= 0 \\
\mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}-x\mathrm{i}+y) &= 0 \\
\mathrm{Re}((x+y)+(y-x)\mathrm{i}) &= 0 \\
x+y &= 0 \\
y &= -x
\end{aligned}$$

2. Drehung der Spiegelachse in die reelle Achse

   Die Spiegelachse wird durch eine Ursprungsgerade mit der Steigung -1 beschrieben. Um diese in die reelle Achse zu legen, muss sie um $45\,^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden. Das entspricht einem Winkel von $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
z \to z_1:\ z_1 &= c_1 \cdot z \\
&= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(x+y\mathrm{i}) \\
&= \left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)(x+y\mathrm{i}) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)(x+y\mathrm{i}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\mathrm{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(x + y\mathrm{i} + x\mathrm{i} - y\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big((x-y)+(x+y)\mathrm{i}\Big)
\end{aligned}$$

3. Ausführen der Spiegelung

$$\begin{aligned}
z_1 \to z_2:\ z_2 &= \overline{z_1} \\
&= \overline{\frac{\sqrt{2}}{2}\Big((x-y)+(x+y)\mathrm{i}\Big)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big((x-y)-(x+y)\mathrm{i}\Big)
\end{aligned}$$

4. Zurückdrehen der Spiegelachse

$$
\begin{aligned}
z_2 \to w:\ w &= c_2 \cdot z_2 \\
&= (\cos -\varphi + \mathrm{i}\sin -\varphi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big((x-y)-(x+y)\mathrm{i}\Big)\right) \\
&= \Big(\cos -\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{4}\Big)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big((x-y)-(x+y)\mathrm{i}\Big)\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big((x-y)-(x+y)\mathrm{i}\Big)\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(x-y\Big) - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(x+y\Big)\mathrm{i}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Big(x-y\Big) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Big(x+y\Big)\mathrm{i} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Big(x-y\Big)\mathrm{i} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Big(x+y\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(x-y\Big) - \frac{1}{2}\Big(x+y\Big)\mathrm{i} - \frac{1}{2}\Big(x-y\Big)\mathrm{i} - \frac{1}{2}\Big(x+y\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((x-y)-(x+y)\Big) - \frac{1}{2}\Big((x+y)+(x-y)\Big)\mathrm{i} \\
&= \frac{1}{2}\Big(x-y-x-y\Big) - \frac{1}{2}\Big(x+y+x-y\Big)\mathrm{i} \\
&= \frac{1}{2}\Big(-2y\Big) - \frac{1}{2}\Big(2x\Big)\mathrm{i} \\
&= -y - x\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

3 Spiegelung an der imaginären und der reellen Achse

Die Spiegelung eines Punktes an der imaginären Achse geschieht durch einen Vorzeichenwechsel des Realteils des Punktes.

$$z \to w_1:\ w_1 = -\operatorname{Re} z + \mathrm{i}\operatorname{Im} z$$

Eine Spiegelung an der reellen Achse geschieht durch einen Vorzeichenwechsel des Imaginärteils des Punktes.

$$z \to w_2:\ w_2 = \operatorname{Re} z - \mathrm{i}\operatorname{Im} z$$

Eine Nacheinanderausführung beider Spiegelungen wechselt sowohl das Vorzeichen des Real- als auch des Imaginärteils des Punktes.

$$z \to w:\ w = -\operatorname{Re} z - \mathrm{i}\operatorname{Im} z$$

Tatsächlich wird hierdurch eine *Punktspiegelung* am Koordinatenursprung durchgeführt.

4 Berechnung von Polynomen

Gegeben ist das Polynom

$$(-1+\mathrm{i})^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^k (\mathrm{i})^{8-k}$$

4.1 Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned}
(-1+\mathrm{i})^8 &= \mathrm{i}^8 + 8\cdot(-1)\cdot\mathrm{i}^7 + 28\cdot(-1)^2\cdot\mathrm{i}^6 + 56\cdot(-1)^3\cdot\mathrm{i}^5 + 70\cdot(-1)^4\cdot\mathrm{i}^4 + \\
&\quad + 56\cdot(-1)^5\cdot\mathrm{i}^3 + 28\cdot(-1)^6\cdot\mathrm{i}^2 + 8\cdot(-1)^7\cdot\mathrm{i} + (-1)^8 \\
&= 1 + 8\mathrm{i} - 28 - 56\mathrm{i} + 70 + 56\mathrm{i} - 28 - 8\mathrm{i} + 1 \\
&= (1 - 28 + 70 - 28 + 1) + (8 - 56 + 56 - 8)\mathrm{i} \\
&= 16 + 0\mathrm{i} \\
&= 16
\end{aligned}$$

4.2 Euler-Moivre-Formel

$$\begin{aligned}
r &= |z| \\
&= |-1+\mathrm{i}| \\
&= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

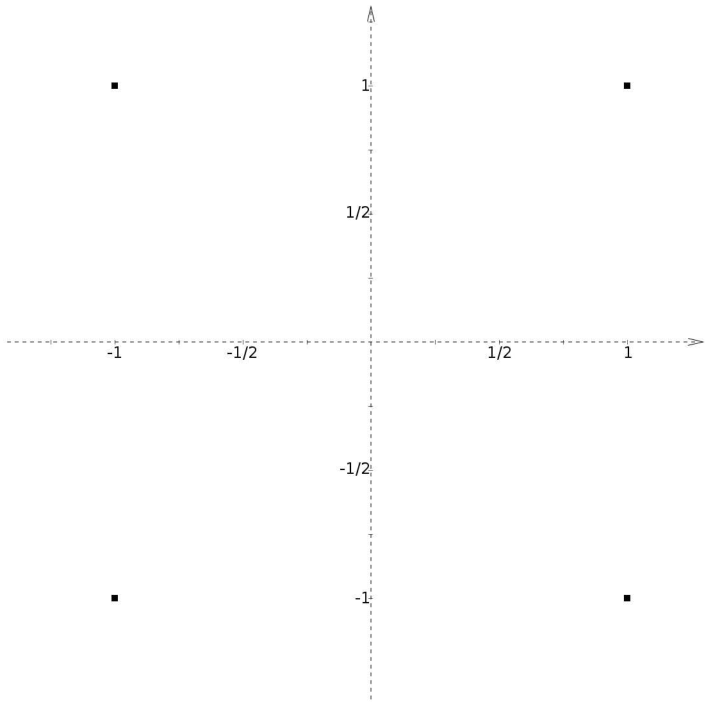
$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{1}{-1} \\
&= 1 \qquad z \text{ liegt im 2. Quadranten} \\
\Rightarrow \varphi &= \pi - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^8 &= \sqrt{2}^8\left(\cos\frac{8\cdot 3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{8\cdot 3\pi}{4}\right) \\
&= 16\left(\cos 6\pi + \mathrm{i}\sin 6\pi\right) \\
&= 16(1 + 0\mathrm{i}) \\
&= 16
\end{aligned}$$

5 Komplexe Wurzeln

5.1

$$
\begin{aligned}
z^4 &= a = -4 \\[1em]
r &= |a| = 4 \\[1em]
\tan\varphi &= 0 \qquad a \text{ liegt im 2. Quadranten} \\
\Rightarrow \ \varphi &= \pi \\[1em]
z_0 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= 1 + \mathrm{i} \\[1em]
z_1 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= -1 + \mathrm{i} \\[1em]
z_2 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= -1 - \mathrm{i} \\[1em]
z_3 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= 1 - \mathrm{i}
\end{aligned}
$$


1
1/2
-1
-1/2
1/2
1
-1/2
-1

5.2

$$\begin{aligned}
z^3 &= a = 2 - 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

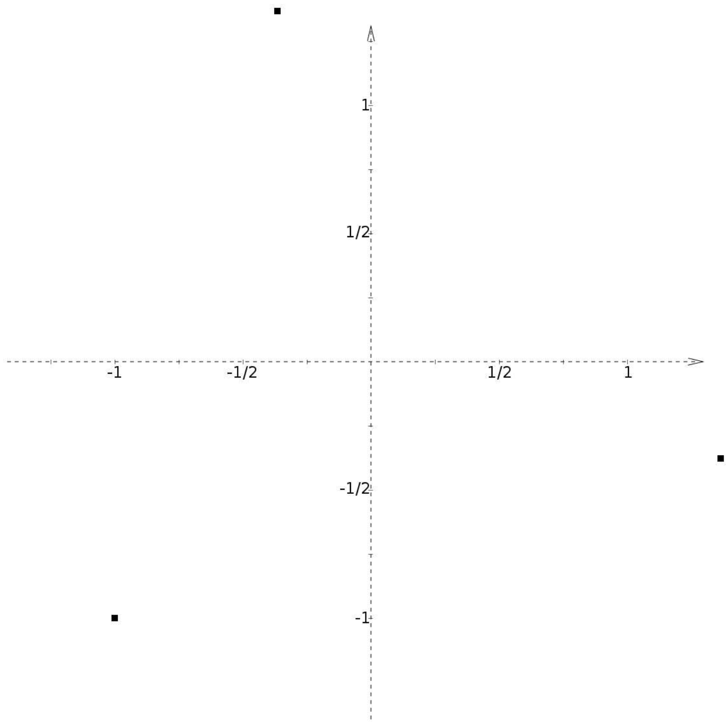
$$\begin{aligned}
r &= |a| \\
&= |2 - 2\mathrm{i}| \\
&= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \frac{-2}{2} = -1 \qquad a \text{ liegt im 4. Quadranten} \\
\Rightarrow \quad \varphi &= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos -\frac{\pi}{4\cdot 3} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{4\cdot 3}\right) \\
&= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) \\
&= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\mathrm{i} \\
&\approx 1,366025 - 0,366025\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right) \\
&= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= -\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\mathrm{i} \\
&\approx -0,366025 + 1,366025\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt[3]{2}\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= \left(-\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)8 - \left(\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i} \\
&= -\frac{2^{\frac{2}{6}}\,2^{\frac{1}{6}}\,2^{\frac{3}{6}}}{2} - \frac{2^{\frac{2}{6}}\,2^{\frac{1}{6}}\,2^{\frac{3}{6}}}{2}\mathrm{i} \\
&= -1 - \mathrm{i}
\end{aligned}$$



6 Quadratische Gleichung

$$
\begin{aligned}
z^2 - 5z + 8 + 6\mathrm{i} &= 0 \\
z^2 - 5z + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 + 6\mathrm{i} &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \text{(quadratische Ergänzung)} \\
\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 + 8 + 6\mathrm{i} &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8 - 6\mathrm{i} \\
\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} - \frac{32}{4} - 6\mathrm{i} \\
\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 &= -\frac{7}{4} - 6\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Es sind die zweiten Wurzeln aus $w^2 = -\frac{7}{4} - 6\mathrm{i}$ zu ermitteln.

$$
\begin{aligned}
\left|-\frac{7}{4}-6\mathrm{i}\right| &= \sqrt{\left(-\frac{7}{4}\right)^2+(-6)^2} \\
&= \sqrt{\frac{49}{16}+36} \\
&= \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} \\
\tan\varphi &= \frac{-6}{-\frac{7}{4}} = \frac{24}{7} \qquad \text{Punkt im 3. Quadranten} \\
\Rightarrow\ \overline{\varphi} &\approx 1,2870022 \\
\varphi &= \overline{\varphi}+\pi \approx 4,428595
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{\frac{25}{4}}\left(\cos\frac{4,428595}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{4,428595}{2}\right) \\
&= \frac{5}{2}(-0,6+0,8\mathrm{i}) \\
&= -\frac{3}{2}+2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{\frac{25}{4}}\left(\cos\frac{4,428595+2\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{4,428595+2\pi}{2}\right) \\
&= \frac{5}{2}(0,6-0,8\mathrm{i}) \\
&= \frac{3}{2}-2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
w = z-\frac{5}{2} \ \Rightarrow\ z = w+\frac{5}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= w_0+\frac{5}{2} \\
&= -\frac{3}{2}+2\mathrm{i}+\frac{5}{2} \\
&= \frac{2}{2}+2\mathrm{i} = 1+2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= w_1+\frac{5}{2} \\
&= \frac{3}{2}-2\mathrm{i}+\frac{5}{2} \\
&= \frac{8}{2}-2\mathrm{i} = 4-2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$